

УДК 514.7+514.8

## МОДЕЛЬ ПРИРОДНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ АНАЛОГИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КРИВЫХ И ОСЦИЛЛЯЦИЙ

© В.И. Тасенко А.В. Крутов, С.А. Силкин

Tasenko V.I., Krutov A.V., Silkin S.A. Model of physical processes on the base of analogy of the characteristic equation of curves and compelled fluctuations. The established analogy between the differential equation describing the form by a curve, and equation of the compelled fluctuations (ACF) is analyzed in the article.

Данная задача важна, в частности, с точки зрения повышения точности аппроксимации кривых. С учетом установленной взаимосвязи (АВК) геометрической формы кривой с таким динамическим достаточно общим природным явлением, как колебательный циклический процесс, результаты исследования могут найти применение в вопросах управления, искусственного интеллекта, в теории распознавания образов [1] и т. п. Рассматриваемые при этом дифференциальные уравнения широко используются в самых различных областях. Разнообразны и способы их интегрирования. В оригинальном изложении в [2] приводится способ решения уравнения ВК общего вида с помощью функции Грина, в [3] рассматривается своеобразный подход к решению нелинейных уравнений в связи с аналогией в теории жестко-пластичности и вязко-пластичности.

Учитывая вышеизложенное, можно считать, что свойства решений, рассматриваемые здесь, также могут быть полезны в различных областях.

В последнее время много внимания уделяется поиску кривых нового типа и способов их определения. Так, в [4] рассматриваются способы задания кривых и построения нормали и касательной к ним на основе принципа виртуальных перемещений.

Вопрос подходящего выбора направления одной из осей координат для описания пространственных кривых, принимаемой за ось аппликат, в рамках представленного способа классификации кривых рассматривался в [5]. При этом выбор направления оси аппликат определяется свойствами последовательности сопровождающих базисов кривой. Некоторые другие предпосылки на основе свойств поверхностей обсуждались в [6].

После того, как определено направление оси аппликат, остается открытым вопрос о расположении начала и двух других осей системы координат по отношению к телу кривой. Этот вопрос стоит, собственно, и для плоских кривых. Даже в простейшем случае центральной кривой этот вопрос до конца неясен. Настоящим предпринимаются попытки по возможности продвинуть решение этой проблемы, которое связано с формой координатных уравнений кривых и выбором постоянных интегрирования. Такой выбор будет более осознанным, после того, как этим постоянным будет придан определенный смысл.

**Опорная функция кривой и аналогия вынужденных колебаний (АВК).** Опорной функцией  $h$  плоской  $s$ -натурально параметризованной кривой  $r = r(\varphi(s))$  будем называть алгебраическую величину  $h = -(r \mathbf{v})$ , равную по абсолютной величине длине перпендикуляра, опущенного из данного полюса (в частности, из начала координат) на касательную в текущей точке кривой. Множество точек – оснований этих перпендикуляров называют подерой кривой относительно данного полюса. Для функции  $h$  плоской кривой с радиусом кривизны  $\rho$  и направленным углом  $\varphi$  поворота касательной имеем

$$h = -(r \mathbf{v}),$$

$$h'(\varphi) = -(r' \mathbf{v}) - (r \mathbf{v}') = -(r \mathbf{v}') = \operatorname{sgn} \varphi'(s) \cdot (r \boldsymbol{\tau}_\varphi) = (r \boldsymbol{\tau}_\varphi),$$

$$h''(\varphi) = (r' \boldsymbol{\tau}_\varphi) - (r \boldsymbol{\tau}_\varphi') = \rho - (r \mathbf{v}) = \rho - h.$$

Здесь  $\boldsymbol{\tau}_\varphi$  – орт касательной, направленный в сторону, соответствующую росту направленного угла  $\varphi$  поворота касательной. Таким образом, отсюда имеем (см. также [7] и др.)

$$h''(\varphi) + h = \rho. \quad (1)$$

Переходя от угла  $\varphi$  к новой переменной дифференцирования – дуговой координате  $s$ , получим

$$h''(s) - (k'/k)h'(s) + k^2h = k(s). \quad (2)$$

Как видим, соотношение (2) имеет вид хорошо изученного дифференциального уравнения вынужденных колебаний с «вязким» членом, а уравнение (1) – без такового. Таким образом, физическим вынужденным колебаниям кроме графика закона колебаний во времени можно поставить в соответствие определенную кривую, для которой по (2) роль кривизны, а по (1) – радиус кривизны играет вынуждающая сила. Роль времени по (2) – дуга  $s$ , по (1) – направленный угол  $\varphi$ , составляемый касательной этой кривой с осью абсцисс, роль искомой функции времени в колебательном процессе – опорная функция  $h$ . Аналог элементарного импульса вынуждающей силы по (2):  $df = kds$  ( $\varphi$ -аналог скорости), по (1) –  $ds = \rho d\varphi$  ( $s$ -аналог скорости). Наоборот,

для любой кривой с натуральным уравнением  $\rho = \rho(\varphi)$  можно указать колебания с соответствующими силами.

Интересно, что теперь можно дать определенное толкование «работе» нормальной составляющей силы при движении точки единичной массы по криволинейной траектории с постоянной (единичной) скоростью, которая ранее не рассматривалась. В данном случае это с точностью до размерности есть угол, на который повернется касательная к траектории, или интегральная кривизна  $A = \int F_n ds = \int (mv^2/\rho) ds = \int k ds = \Delta\varphi$ . С учетом аналогии АВК это отвечает полному импульсу вынуждающей силы или другой величины в соответствующем колебательном процессе. И обратно, полный импульс вынуждающей силы за некоторое время при прямолинейном колебании материальной точки отвечает интегральной кривизне или полному углу поворота касательной плоской кривой с соответствующим радиусом кривизны. Слово «работа» для нормальной составляющей силы мы взяли в кавычки, так как понятие работы формировалось как изменение такой меры движения, как кинетическая энергия материальной точки. Данная «работа» в совокупности с обычной работой касательной составляющей силы в общем случае движения материальной точки тоже характеризует изменение некоторой величины  $\varphi mv^2$ , как меры движения [8], которая, как видим, несколько отличается от кинетической энергии:

$$d(\varphi mv^2) = (2\varphi F_\tau + F_\nu) ds; d(2\varphi mv^2/2) = (2\varphi F_\tau + F_\nu) k^{-1} d\varphi. \quad (3)$$

Существенным в данном выражении является то, что эта элементарная работа может рассматриваться как работа пары сил, момент которой не является закрепленным вектором, а также то, что при этом возможны новые интегралы дифференциальных уравнений движения [8].

Уравнение (2) в качестве «вынуждающей силы» имеет кривизну, «восстанавливающая сила» пропорциональна квадрату «вынуждающей силы», переменный коэффициент «вязкости» равен  $(\ln k)'_s$ , т. е. производной от натурального логарифма «вынуждающей силы».

Приведенная аналогия задачи определения уравнений кривой с помощью опорной функции с задачей исследования вынужденных колебаний представляет интерес, как для теории кривых, так и для выявления новых закономерностей в колебательных процессах различной природы, включая социальную и космологическую. Многие закономерности и понятия, присущие уравнению вынужденных колебаний, можно перенести на данную задачу получения уравнений кривой и использовать для изучения ее свойств. Так, например, явления частотного резонанса и биений [4] тесно связаны с исследованием свойств кривой. Периодическим колебаниям соответствуют замкнутые кривые и наоборот.

**Метод вариации постоянных в задаче о нахождении уравнений аналоговой кривой.** Рассмотрим основные моменты решения уравнения (2) вынужденных колебаний методом вариации постоянных применительно к данной задаче определения уравнений аналоговой кривой. Как было показано выше, уравнение (2) сводится к уравнению (1) колебаний без «вязких

сил» с «вынуждающей силой», пропорциональной радиусу кривизны.

Если имеется дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$\ddot{h}(t) + \lambda^2 h = f(t),$$

то его заменой  $\varphi = \lambda t$  можно привести к виду

$$h''(\varphi) + h = (1/\lambda^2) f(\varphi/\lambda).$$

Тогда в качестве радиуса кривизны  $\rho$  аналоговой кривой, соответствующей этим вынужденным колебаниям, следует взять величину  $\rho = (1/\lambda^2) f(\varphi/\lambda)$ .

Если же имеется кривая с радиусом кривизны  $\rho(\varphi)$  и уравнением (1):  $h''(\varphi) + h = \rho(\varphi)$  для опорной функции  $h$ , то этой кривой можно поставить в соответствие вынужденные колебания с вынуждающей силой  $f(t) = \lambda^2 \rho(\lambda t)$ , описываемые уравнением

$$\ddot{h}(t) + \lambda^2 h = f(t).$$

В силу вышесказанного, не меняя общности, будем рассматривать метод вариации постоянных для решения дифференциального уравнения вида (1).

Для общего решения  $h(\varphi)$  неоднородного уравнения (1) запишем

$$h(\varphi) = h_{o.o.} + h_{ч.н.}$$

Здесь общее решение  $h_{o.o.}$  соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$h_{o.o.} = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi.$$

Частное решение  $h_{ч.н.}$  исходного неоднородного уравнения вариацией постоянных  $C_1, C_2$  ищется в виде

$$h_{ч.н.} = h_1(\varphi) \cos \varphi + h_2(\varphi) \sin \varphi. \quad (4)$$

Из всех функций  $h_1(\varphi), h_2(\varphi)$ , удовлетворяющих в составе  $h_{ч.н.}$  исходному неоднородному уравнению (1), обычно выбираются удовлетворяющие дополнительному условию

$$h'_1(\varphi) \cos \varphi + h'_2(\varphi) \sin \varphi = 0. \quad (5)$$

Тогда для  $h'_1, h'_2$  имеем из (1)

$$-h'_1 \sin \varphi + h'_2 \cos \varphi = \rho(\varphi). \quad (6)$$

Так что, из (4), (6) получается следующее частное решение  $h_{ч.н.}$  [9] и его производная  $h'_{ч.н.}$

$$\begin{aligned} h_{ч.н.} &= h_1(\varphi) \cos \varphi + h_2(\varphi) \sin \varphi = \\ &= -\cos \varphi \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho(\varphi) \sin \varphi d\varphi + \\ &+ \sin \varphi \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho(\varphi) \cos \varphi d\varphi, \end{aligned} \quad (7)$$

$$h'_{ч.н.} = \sin\varphi \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho(\varphi) \sin \varphi d\varphi + \cos\varphi \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho(\varphi) \cos \varphi d\varphi =$$

$$= -h_1(\varphi)\sin\varphi + h_2(\varphi)\cos\varphi. \quad (8)$$

При этом

$$h'_1(\varphi) = -\rho(\varphi)\sin\varphi, \quad h'_2(\varphi) = \rho(\varphi)\cos\varphi; \quad (9)$$

$$h_1(\varphi) = -\int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho(\varphi) \sin \varphi d\varphi, \quad h_2(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho(\varphi) \cos \varphi d\varphi. \quad (10)$$

**Краевые условия и уравнения кривой.**  
 Дифференцируя по  $\varphi$  функцию  $h = -(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})$ , получим

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}') = -h'; \quad -(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\tau}_\varphi) = -h'.$$

Для ортов  $\boldsymbol{\tau}_\varphi, \mathbf{v}$  имеем

$$\boldsymbol{\tau}_\varphi = (\cos\varphi; \sin\varphi), \quad \mathbf{v} = (-\sin\varphi; \cos\varphi).$$

Тогда для радиус-вектора  $\mathbf{r}$  кривой можно записать

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\tau}_\varphi)\boldsymbol{\tau}_\varphi + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} = h'\boldsymbol{\tau}_\varphi - h\mathbf{v}. \quad (11)$$

Координатные уравнения кривой в  $\varphi$ -параметризации при этом будут иметь вид

$$x = h'(\varphi)\cos\varphi + h\sin\varphi = h'(\varphi)\cos\varphi - (-h)\sin\varphi, \quad (12)$$

$$y = h'(\varphi)\sin\varphi - h\cos\varphi = h'(\varphi)\sin\varphi + (-h)\cos\varphi.$$

Запишем общее решение неоднородного уравнения (1) с учетом рассмотренного его частного решения

$$h(\varphi) = h_{o.o.} + h_{ч.н.} = C_1\cos\varphi + C_2\sin\varphi -$$

$$- \cos\varphi \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho(\varphi) \sin \varphi d\varphi + \sin\varphi \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho(\varphi) \cos \varphi d\varphi. \quad (13)$$

Отсюда имеем

$$h(\varphi_0) = C_1\cos\varphi_0 + C_2\sin\varphi_0, \quad h'(\varphi_0) =$$

$$= -C_1\sin\varphi_0 + C_2\cos\varphi_0. \quad (14)$$

Разрешая относительно  $C_1, C_2$ , получим

$$C_1 = h_0 \cos\varphi_0 - h'_0 \sin\varphi_0 = -y_0,$$

$$C_2 = h_0 \sin\varphi_0 + h'_0 \cos\varphi_0 = x_0. \quad (15)$$

Так как определитель системы отличен от нуля (синус и косинус не обращаются одновременно в ноль), то отсюда следует, что  $C_1 = C_2 = 0$ , если  $h_0 = h'_0 = 0$ .

Отметим, что для конкретной кривой мы должны указать именно частное решение соответствующего дифференциального уравнения. При использовании данной версии метода вариации постоянных, характеризующегося специальным способом выбора частного решения, в задаче о кривых оказывается, что этот специальный выбор влечет за собой специальное распо-

ложение системы координат по отношению к телу кривой, соответствующей дифференциальному уравнению. Именно, если положить  $C_1 = C_2 = 0$ , то это будет означать, что начало при любом  $\varphi_0$  должно быть расположено на кривой и именно в точке, являющейся ее вершиной ( $x_0 = y_0 = h(\varphi_0) = h'(\varphi_0) = 0$ ).

Если только  $C_1 = 0, (C_2 \neq 0)$ , то  $y_0 = 0$  и исходная точка кривой лежит на оси абсцисс.

$$x_0 = C_2 = h'_0 \frac{h'_0}{h_0} \sin \varphi_0 + h_0 \sin \varphi_0 = \frac{h_0^2 + h_0'^2}{h_0} \sin \varphi_0.$$

Угол  $\varphi$  может быть равен нулю, если только  $x_0 = C_2 = 0$ , то есть, если  $h'_0 = 0$  и значит, начало должно быть в вершине, а при  $\varphi = \pi/2, x_0 = C_2 = \frac{h_0^2 + h_0'^2}{h_0}$ .

Если  $C_2 = 0, C_1 \neq 0$ , то  $x_0 = 0$ , исходная точка лежит на оси ординат

$$y_0 = C_1 = -\frac{h'_0 h_0}{h_0} \cos \varphi_0 - h_0 \cos \varphi_0 = -\frac{h_0^2 + h_0'^2}{h_0} \cos \varphi_0.$$

Угол  $\varphi_0$  при данных условиях не может для не вершины быть равным  $\pi/2$ , а при  $\varphi_0 = 0$ ,

$$y_0 = C_1 = -\frac{h_0^2 + h_0'^2}{h_0};$$

если исходная точка при этом – вершина, то  $y_0 = C_1 = -h_0$ .

Подставим функцию  $h(\varphi) = h_{o.o.} + h_{ч.н.}$  в уравнения (12) кривой, получим

$$x = h'_{ч.н.}(\varphi)\cos\varphi + h_{ч.н.}\sin\varphi + C_2,$$

$$y = h'_{ч.н.}(\varphi)\sin\varphi - h_{ч.н.}\cos\varphi - C_1. \quad (16)$$

Заметим, что общее решение  $h_{o.o.}$  однородного уравнения обращает свою часть в уравнениях кривой в константы и получается ответственной только за расположение начала координат по отношению к телу кривой. Частное решение в таком виде удовлетворяет нулевым начальным значениям  $h'_{ч.н.}(\varphi_0) = h_{ч.н.}(\varphi_0) = 0$  при любом  $\varphi_0$ , которое используется в начальных условиях всей задачи [9, с. 98] и, следовательно, не несет ответственности за начальные условия. Последнее говорит о чисто вынужденном характере частного решения  $h_{ч.н.} = h_1(\varphi)\cos\varphi + h_2(\varphi)\sin\varphi$ , которым оно обладает благодаря специальному его выбору, отмеченному выше. Ясно, что частное решение в целях изучения свойств кривых можно выбрать и другим способом, например, сообразно с краевыми условиями, которые также могут быть поставлены с переходом к задаче о собственных значениях, или в соответствии с обобщением метода вариации постоянных нахождения частного решения [9, с. 103–105], [10]. Однако здесь ограничимся рассмотрением лишь задачи Коши при обычном методе вариации постоянных.

Так как по (15)  $C_1 = -y_0, C_2 = x_0$ , то уравнения (16) примут вид формул ортогонального преобразования координат векторов  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0; y - y_0), \mathbf{H}_\varphi = (h_{ч.н.}, h'_{ч.н.})$

$$x - x_0 = h_{ч.н.}\sin\varphi + h'_{ч.н.}(\varphi)\cos\varphi,$$

$$y - y_0 = h_{ч.н.} \cos \varphi - h'_{ч.н.}(\varphi) \sin \varphi. \quad (17)$$

Эти координатные уравнения можно записать в еще более простом виде

$$x - x_0 = h_2, y - y_0 = -h_1. \quad (18)$$

Или в векторно-матричной форме

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{A}\mathbf{H}_\varphi = \mathbf{B}\mathbf{H}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sin \varphi & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \pi/2 & \sin \pi/2 \\ -\sin \pi/2 & \cos \pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где

$$\mathbf{H}_\varphi = (h_{ч.н.}, h'_{ч.н.}) = (h_1(\varphi) \cos \varphi + h_2(\varphi) \sin \varphi, -h_1(\varphi) \sin \varphi + h_2(\varphi) \cos \varphi), \quad \mathbf{H} = (h_1, h_2). \quad (20)$$

Из (14) с учетом (15) имеем

$$h_0 \cos \varphi_0 - h'_0 \sin \varphi_0 = -y_0, \quad (21)$$

$$h_0 \sin \varphi_0 + h'_0 \cos \varphi_0 = x_0.$$

Разрешим эту систему относительно  $h_0, h'_0$ , получим

$$h_0 = x_0 \sin \varphi_0 - y_0 \cos \varphi_0 = \rho_0 - h \gg 0,$$

$$h'_0 = x_0 \cos \varphi_0 + y_0 \sin \varphi_0.$$

Здесь  $h_0, h'_0$  есть соответственно ориентированное расстояние от начала координат до касательной и до нормали, полярный радиус точки подеры кривой и ее эволюты.

Сумма квадратов этих величин есть квадрат полярного радиуса точки кривой. Формулы (21) связывают исходную точку  $(x_0, y_0)$  кривой с расположением осей в окрестности этой точки.

**Эвольвентно-центроидное представление кривой.** Кривая, рассматриваемая как эвольвента своей эволюты, представляет собой траекторию (рулетту) некоторой точки прямой – касательной эволюты; при этом касательную можно рассматривать как подвижную центроиду, в то время как неподвижной центроидой является эволюта данной кривой-эвольвенты.

С другой стороны, любую кривую как годограф переменного вектора плоскости можно рассматривать как окружность переменного радиуса. Это следует из полярных уравнений кривой-годографа:  $r = r(\varphi)$ ,  $x = r(\varphi) \cos \varphi$ ,  $y = r(\varphi) \sin \varphi$ ;  $x^2 + y^2 = r^2(\varphi) \equiv a^2(\varphi)$ . Тогда эволюту данной кривой тоже можно считать окружностью переменного радиуса, а саму кривую – траекторией (рулеттой) точки прямой при ее качении по этой окружности. Аналогично, обращая движение, кривую можно считать также траекторией точки окружности переменного радиуса  $a(\varphi)$  при ее качении по прямой, т. е. некоторым обобщением циклоиды. При этом для сохранения определенной связи с прямым движением, в обратном движении необходимо рассматривать, в

частности, траекторию характерной точки, жестко связанной с окружностью и совпадающей с точкой контакта в исходном положении в прямом и обратных движениях. Точка, описывающая данную кривую, может браться и не на самой прямой линии (в прямом движении) или на окружности (в обратном движении), а быть жестко связанной с ними, удаленной от точки контакта, например, в направлении нормали на фиксированное расстояние (обычно от центра окружности – на  $a\lambda$ ), но совпадающая в своих исходных положениях в прямом и обратном движениях. Тогда будет иметь место удлиненная или укороченная эвольвента окружности и, соответственно, удлиненная или укороченная циклоида. Таким образом, мы естественным путем приходим к эвольвентно-циклоидальному представлению кривых.

Радиус  $a$  катящейся окружности может изменяться по нашему усмотрению каким-либо способом, например, в зависимости от характеристик кривой. Рассмотрим один из таких способов, основанный на эвольвентно-кинематической модификации интегрирования по частям, см., например, [11]. Пусть имеется произвольная  $p$ -параметризованная кривая  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(p) = (x(p), y(p))$ . Пользуясь возможностью одну их координат выражать произвольной функцией параметра, введем новую  $V$ -параметризацию следующим образом

$$x = \int UdV + C, y = V^2/2 + C. \quad (22)$$

Тогда имеем

$$x'(V) = U, y'(V) = V, U/x'(p) = V/y'(p); \quad (23)$$

$$Udy - Vdx = 0.$$

Обозначим через  $a$  четверть квадрата радиус-вектора годографа скорости текущей точки кривой при изменении числового параметра  $V$ , угол наклона касательной кривой – через  $\varphi$ , получим

$$x^2(V) + y^2(V) = U^2 + V^2 = 4a, \quad (24)$$

$$x'(V)[x^2(V) + y^2(V)]^{1/2} = x'(V)[U^2 + V^2]^{1/2} = U/(4a)^{1/2} = \cos \varphi,$$

$$y'(V)[x^2(V) + y^2(V)]^{1/2} = y'(V)[U^2 + V^2]^{1/2} = V/(4a)^{1/2} = \sin \varphi. \quad (25)$$

Воспользуемся компонентой несколько обобщенной векторной формулы интегрирования по частям [11]

$$2 \int UdV = UV + \int (UdV - VdU), \quad (26)$$

найдем, с учетом (22), (24), (25), уравнения данной кривой в  $\varphi$ -параметризации

$$x = \int UdV = a(2\varphi + \sin 2\varphi) + C_1, \quad (27)$$

$$y = a(1 - \cos 2\varphi) + C_2,$$

$$a2\varphi = \int ad(2\varphi). \quad (28)$$

Из этих уравнений видно, что кривую можно рассматривать как траекторию точки окружности переменного радиуса  $a(\varphi)$ , катящейся без скольжения снизу по прямой  $Y = 2a$ , которая сама перемещается поступательно в ортогональном ей направлении. Такую кривую-траекторию можно назвать обобщенной циклоидой, так как она обладает аналогичными свойствами и ее частным случаем при  $a = \text{const}$  является обычная циклоида [12].

Отметим, что представление кривых в циклоидальной форме имеет важное теоретическое и прикладное значение. Так, в [13] со ссылкой на [14] отмечается, что очередным этапом развития теории Бурместера аппроксимации кривых-траекторий в задачах синтеза механизмов является исследование таких точек плоской фигуры, которые в определенном числе положений лежат не на окружности или прямой (как обычно), а на других кривых, которые могут быть вычерчены простейшими механизмами, в частности, на циклоиде, что в последующем привело к построению циклоидальной теории Бурместера [14].

Продифференцируем по  $\varphi$  любое одно из уравнений (27), получим дифференциальное уравнение для определения  $a(\varphi)$  при заданном радиусе кривизны  $\rho(\varphi)$

$$2a' \sin \varphi + 4a \cos \varphi = \rho. \quad (29)$$

Как видим, это уравнение не содержит промежуточный параметр  $V$ , с помощью которого мы первоначально ввели величину  $a$ , если радиус кривизны  $\rho$  кривой задан в функции угла  $\varphi$ , например. Поэтому теперь эту величину можно определить как функцию, удовлетворяющую уравнению (29) и, следовательно, такую, что уравнение кривой с тем же радиусом кривизны  $\rho$ , что и в (29), с ее помощью записывается в виде обобщенной циклоиды (27), (28). Таким образом, функция  $a(\varphi)$  кривой является переменным радиусом кривой – «окружности», точкой которой описывается данная кривая при качении без скольжения окружности по параллельно самой себе перемещающейся прямой. Параметр  $V$  при известных  $a(\varphi)$ ,  $\rho(\varphi)$ , может быть при необходимости определен интегрированием из (24).

Если положить, в частности,  $V = \varphi$ , то  $x'(V) \equiv U = x'(\varphi) = \rho \cos \varphi$ , и для переменного радиуса  $a$  катящейся окружности получаем

$$a = (1/4)(\rho^2 \cos^2 \varphi + \varphi^2); \rho = (4a - \varphi^2)^{1/2} / \cos \varphi. \quad (30)$$

$$a' = (1/4)(2\rho\rho' \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin 2\varphi + 2\varphi).$$

Подстановка этого радиуса окружности и его производной в (29) дает дифференциальное уравнение для радиуса кривизны

$$[\rho\rho' \cos^2 \varphi - (\rho^2/2) \sin 2\varphi + \varphi] \sin \varphi + (\rho^2 \cos^2 \varphi + \varphi^2) \cos \varphi = \rho. \quad (31)$$

Подстановка  $\rho$  из (30) в (29) дает дифференциальное уравнение относительно  $a$

$$2a' \sin \varphi + 4a \cos \varphi = (4a - \varphi^2)^{1/2} / \cos \varphi;$$

$$a' \sin 2\varphi + 2a(1 + \cos 2\varphi) = (4a - \varphi^2)^{1/2}. \quad (32)$$

Т.о., в любом случае в итоге получим уравнения конкретной кривой.

**Пример. Аналоговая кривая для вынужденных колебаний с гармонической вынуждающей силой.** Геометрический аналог резонанса. В [4, с. 180] приведены выражения для функций  $h_1$ ,  $h_2$  в частном решении и само частное решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний, которое имеет частоту и фазу вынуждающей силы, а амплитуда обратно пропорциональна разности квадратов вынуждающей и собственной частот. С учетом аналогии АВК это частное синусоидальное решение может рассматриваться как частное решение для опорной функции  $h$  в зависимости от угла  $\varphi$  поворота касательной, которым заменяется время в вынужденных колебаниях. Представляет интерес выяснить, какая кривая соответствует этим вынужденным колебаниям. Ясно, что радиус кривизны этой кривой есть синусоидальная функция угла  $\varphi$ .

Уравнениями плоской кривой общего вида в терминах  $h$ ,  $\varphi$  являются уравнения (12):

$$x = h'(\varphi) \cos \varphi + h \sin \varphi = h'(\varphi) \cos \varphi - (-h) \sin \varphi,$$

$$y = h'(\varphi) \sin \varphi - h \cos \varphi = h'(\varphi) \sin \varphi + (-h) \cos \varphi.$$

Если по известному  $h$  мы найдем  $h'$  и подставим сюда, мы получим уравнение интересующей нас кривой. Пусть  $\rho(\varphi) = b \cos(\varphi + \beta)$ , тогда имеем

$$\begin{aligned} h_1 &= (b/2) \{ [(1 + \nu)^{-1} \cos[(1 + \nu)\varphi + \beta] + (1 - \nu)^{-1} \cos[(1 - \nu)\varphi - \beta]] \}, \\ h_2 &= (b/2) \{ [(1 - \nu)^{-1} \sin[(1 - \nu)\varphi - \beta] + (1 + \nu)^{-1} \sin[(1 + \nu)\varphi + \beta]] \}. \end{aligned} \quad (33)$$

$$h_{ч.н.} = b(1 - \nu^2)^{-1} \cos(\varphi + \beta),$$

$$h = h_{о.о.} + h_{ч.н.} = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + b(1 - \nu^2)^{-1} \cos(\varphi + \beta),$$

$$h' = -C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi - b\nu(1 - \nu^2)^{-1} \sin(\varphi + \beta).$$

Подставляя в (12), найдем

$$x = C_2 + b(1 - \nu^2)^{-1} [\nu \sin(\varphi + \beta) \cos \varphi + \cos(\varphi + \beta) \sin \varphi],$$

$$y = -C_1 - b(1 - \nu^2)^{-1} [\nu \sin(\varphi + \beta) \sin \varphi + \cos(\varphi + \beta) \cos \varphi].$$

Опуская случай малого отклонения  $\nu$  от единицы (случай биений), рассмотрим случай совпадения частоты  $\nu$  с 1 ( $\nu=1$ ) (явление резонанса в физических колебаниях). Имеем

$$h_1 = (b/2)[(1/2) \cos(2\varphi + \beta) + \varphi \sin \beta] =$$

$$= (b/4)[\cos(2\varphi + \beta) + 2\varphi \sin \beta],$$

$$h_2 = (b/2)[(1/2) \sin(2\varphi + \beta) + \varphi \cos \beta] =$$

$$= (b/4)[\sin(2\varphi + \beta) + 2\varphi\cos\beta]. \quad (34)$$

$$h_{ч.н.} = (b/2)[(1/2)\cos(\varphi + \beta) + \varphi\sin(\varphi + \beta)],$$

$$h = h_{о.о.} + h_{ч.н.} = C_1\cos\varphi + C_2\sin\varphi + (b/2)[(1/2)\cos(\varphi + \beta) + \varphi\sin(\varphi + \beta)]$$

$$h' = -C_1\sin\varphi + C_2\cos\varphi + (b/2)[-(1/2)\sin(\varphi + \beta) + \sin(\varphi + \beta) + \varphi\cos(\varphi + \beta)].$$

$$\begin{aligned} x &= C_2 + (b/4)[\sin(2\varphi + \beta) + 2\varphi\cos\beta], \\ y &= -C_1 + (b/4)[-\cos(2\varphi + \beta) + 2\varphi\sin\beta]. \end{aligned} \quad (35)$$

Получили несколько обобщенную циклоиду. Пусть при  $\varphi = 0$  также  $x = y = 0$ , тогда

$$C_1(\beta) = -(b/4)\cos\beta, \quad C_2(\beta) = -(b/4)\sin\beta,$$

$$x = (b/4)[2\varphi\cos\beta + \sin(2\varphi + \beta)] - (b/4)\sin\beta, \quad (36)$$

$$y = (b/4)[2\varphi\sin\beta - \cos(2\varphi + \beta)] + (b/4)\cos\beta.$$

Сравнение с уравнениями (34) показывает, что эта кривая получается, как и должно, поворотом на прямой угол кривой (34), как радиус-вектора ее точек, и параллельным переносом.

В частности, при  $\beta=0$  имеем обычную циклоиду.

$$x - C_2 = (b/4)(\sin 2\varphi + 2\varphi), \quad y + C_1 = (b/4)(1 - \cos 2\varphi) - b/4.$$

Таким образом, явлению резонанса в вынужденных колебаниях соответствует в качестве аналоговой кривой циклоида и тем подтверждается математическое определение циклоиды как кривой, имеющей синусоидальную зависимость радиуса кривизны от угла поворота ее касательной.

**Свойства аналогии вынужденных колебаний.** Аналогия вынужденных колебаний (АВК) в теории кривых обнаруживает следующие их свойства.

1. Вынужденным колебаниям соответствует некоторая плоская кривая.

Направленный угол  $\varphi$  поворота ее касательной соответствует времени (что позволяет формально обращаться время), радиус  $\rho$  кривизны в функции угла  $\varphi$  есть вынуждающая сила; геометрическим векторам, в частности, векторам касательной и нормали этой моделирующей (аналоговой) кривой соответствуют некоторые векторы, вычисляемые по тем же формулам через угол-время  $t - \varphi$ .

2. Если поместить начало векторов  $\tau, \rho, H, H_\varphi$  в одну точку, то оказывается, что угол между вектором  $H_\varphi$  и вектором  $H$  равен  $\varphi$  (интервал времени протекания колебательного процесса отсчитывается независимо от геометрической системы отсчета и системы координат как арифметизированного пространства).

Величина угла  $\alpha$  ( $\operatorname{tg}\alpha = h'_{ч.н.}/h_{ч.н.}$ ), существующего независимо от геометрической системы отсчета, в которой мы изображаем кривую, может служить временной характеристикой процесса, связанной с его фазой и

направлением протекания (например, процесса развития Вселенной).

При возможности измерения этой и других величин можно с учетом найденных закономерностей пытаться определить текущую фазу и при наличии подходящей модели (кривой) узнать историю и осуществить прогноз дальнейшего хода развития процесса.

3. При восстановлении координатных уравнений кривой по ее кривизне с помощью опорной функции приходим к дифференциальному уравнению вынужденных колебаний. В процессе решения этого уравнения, при поиске частного решения методом вариации постоянных на последнее накладывается требование ортогональности. Если еще наложить требование циклоидальности, то в качестве искомого получается конкретная кривая – парабола. Парабола, как известно, является траекторией материальной точки в центральном поле сил тяжести и в его однородном приближении. Это связывает силовое и геометрическое формирование кривых. Кроме того, данная ситуация может послужить ключом к тому, чтобы уравнение динамики Ньютона рассматривать как существование определенной параметризации кривой-траектории [2].

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (h_2, -h_1) = h' \boldsymbol{\tau} - h\mathbf{v} - \mathbf{r}_0,$$

$$h_1 = -\int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho \sin \varphi d\varphi, \quad h_2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho \cos \varphi d\varphi,$$

$$H = (h_1, h_2) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho \mathbf{v} d\varphi,$$

$$H_\varphi = (h_{ч.н.}, h'_{ч.н.}) = (H_\tau, H_v),$$

$$\mathbf{H}' = \boldsymbol{\rho} = \rho \mathbf{v} = (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi).$$

Эти свойства оставались незамеченными в теории колебаний, вероятно, в силу того, что геометрические аспекты вообще оставались в стороне, а также в силу того, что ограничения (5) на частное решение неоднородного уравнения использовались для упрощения процедуры интегрирования и отбрасывались после этого без дальнейшего рассмотрения, как уже использованные и потому якобы ненужные.

**Заключение.** Можно предположить, в грубом приближении, что функционирование мозга, как модели искусственного интеллекта, осуществляется через посредство электромагнитных взаимодействий при протекании биотоков по разветвленной сети из проводников и других структурных элементов, осуществляющих операции логической цепочки. При достижении определенного критического количества информации, предполагающейся истиной или правдоподобной, после ее статистической обработки на непротиворечивость путем сравнения с заложенной в банке данных, происходит замыкание последовательных участков цепи (которые могут содержать и параллельные элементы), разблокировка общей магистрали, по которой начинается лавинное течение биотока, индуцирующее процессы, приводящие к эвристической эмоциональности.

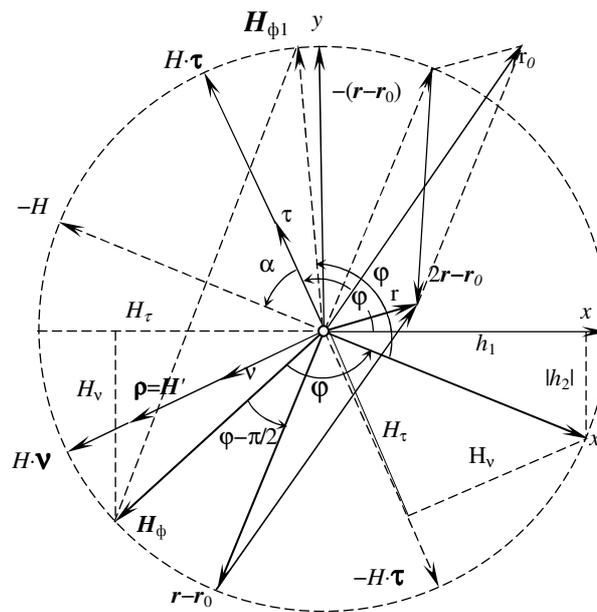


Рис. 1. К свойствам решений дифференциального уравнения вынужденных колебаний

Будем исходить из того, что биоток носит колебательный характер и их изменение описывается в одномерном временном измерении. Тогда, учитывая, что homo sapiens функционирует в пространстве четырехмерном (пространственно-временном), становится потребным механизм преобразования одномерных электрических колебаний в плоские и пространственные образы [16, 17]. Одним из таких механизмов и является данная аналогия (АВК), которая дает возможность перехода от одномерных величин к их плоским образам. Переход в пространство можно осуществить с помощью моделей, рассмотренных в [11], где соотношения на плоскости, в частности, одномерные интегралы, рассматриваются как компоненты годографа скорости текущей точки некоторой пространственной кривой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нильсон Н. Принципы искусственного интеллекта. М.: Радио и связь, 1985. С. 169-170.
2. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Наука, Физматлит, 1997. С. 169-170.
3. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998.
4. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. М.: Изд-во МГУ, 1992. С. 253-255.
5. Крутов А.В. Классификация и уравнения кривых // Вестн. ВГУ. Сер. 2. Естеств. науки. 1996. № 2. С. 210-217.
6. Крутов А.В. О выборе координатных осей для описания кривых // Воронежская зимняя математическая школа (ВЗМШ-2000) «Современный анализ и его приложения»: тез. докл. Воронеж, 2000.
7. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
8. Крутов А.В. Об одной мере движения // Теория конфликта и ее приложения: мат-лы I Всерос. науч.-техн. конф. Воронеж: Воронеж. гос. технол. акад., 2000. С. 58-61.
9. Смирнов В.И. Курс высшей математики Т. 2. М.: Наука, 1974. С. 85-86.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. С. 144.
11. Крутов А.В. Эволюционный подход в интегрировании // Вестник факультета прикладной математики и механики: Вып. 1. Воронеж: ВГУ, 1998.
12. Крутов А.В. Параметрическое интегрирование и его кинематико-геометрическое представление // Вестн. Воронеж. высш. шк. МВД России. 1998. № 2. С. 57-61.
13. Саркисян Ю.Д. Аппроксимационный синтез механизмов М.: Наука, 1982. С. 8-9.
14. Freudenstein F. On the Burmester points of a plane / F. Freudenstein, G.M. Sandor // Trans. ASME, Series E. 1961. V. 28. № 1.
15. Sandor G.N. On existence of a cycloidal Burmester theorie in planar kinematics // Trans. ASME, Series E. 1964. V. 31. № 4.
16. Борисов В.Л., Эксаревский А.В., Эксаревская М.Е. Нейросетевой алгоритм индексирования двоичных образов в информационной системе // Моделирование математических систем: методы, приложения и средства: сб. науч. тр. Воронеж: ВГУ, 1999. С. 46-52.
17. Луценко В.Н. Обработка плоских изображений, ориентированная на подготовку данных для нейрокомпьютера // Нейрокомпьютер. 1994. № 3, 4. С. 59-65.

Поступила в редакцию 20 ноября 2006 г.